Examen HAVO

2016

tijdvak 2
donderdag 23 juni
13:30 - 16:30 uur

wiskunde B (pilot)

Dit examen bestaat uit 18 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 75 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

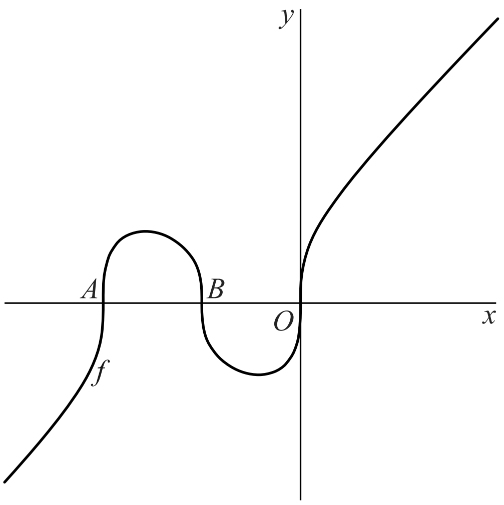
Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Drie snijpunten

De functie f is gegeven door $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x}$. De grafiek van f snijdt de x-as achtereenvolgens in de punten A, B en O. Zie de figuur.

figuur



3p **1** Onderzoek of AB en BO even lang zijn.

Verder is gegeven de horizontale lijn l met vergelijking $y=p$. De grafiek van f snijdt l in drie punten.

4p **2** Bereken voor welke waarden van p dit het geval is. Rond de getallen in je antwoord af op drie decimalen.

Afdakje

In de zijgevel van een flat zit een cirkelvormig raam met daarboven een afdakje.
De diameter van het raam is 120 cm. Het middelpunt van het raam zit op 142 cm boven de grond.
De uiteinden van het afdakje bevinden zich 316 cm boven de grond en liggen 505 cm uit elkaar. Het laagste punt van het afdakje bevindt zich 262 cm boven de grond en 92 cm links van het middelpunt van het raam.
Er wordt een assenstelsel aangebracht zodanig dat het middelpunt van het raam samenvalt met de oorsprong. De eenheden in dit assenstelsel zijn in cm. Zie de figuur, waarin bovendien een aantal maten is gegeven.

figuur

De onderrand van het afdakje heeft de vorm van een deel van een cirkel. Zie de figuur.

Uit de gegevens volgt dat de straal van deze cirkel afgerond op hele cm gelijk is aan 617 cm.

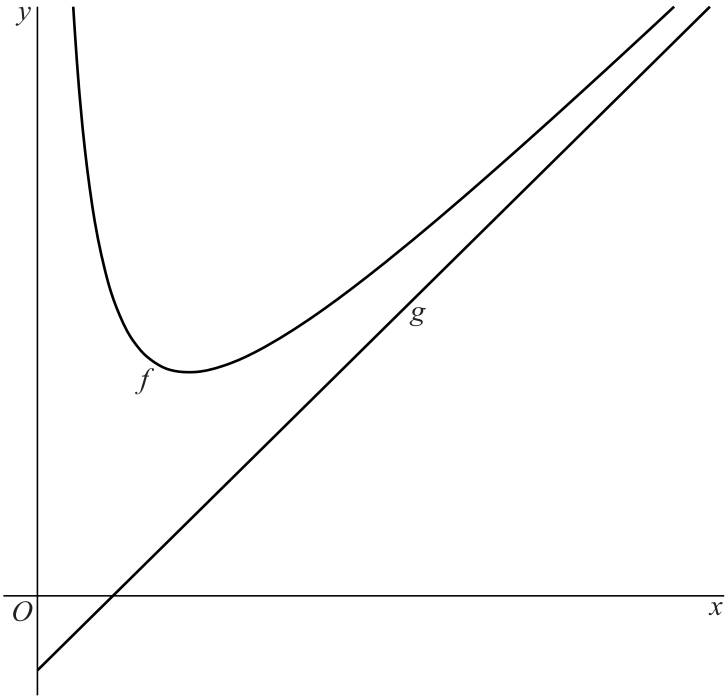
4p **3** Toon dit op algebraïsche wijze aan.

4p **4** Bereken de afstand tussen het afdakje en het raam. Geef je antwoord in gehele cm nauwkeurig.

Dicht bij elkaar

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ zijn de functies f en g gegeven door $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x}$ en $g(x)=x-1$. Voor steeds groter wordende waarden van x komen de grafieken van f en g steeds dichter bij elkaar. Zie figuur 1.

figuur 1



Voor bepaalde waarden van x geldt: $f(x)-g(x)<\frac{1}{100}$

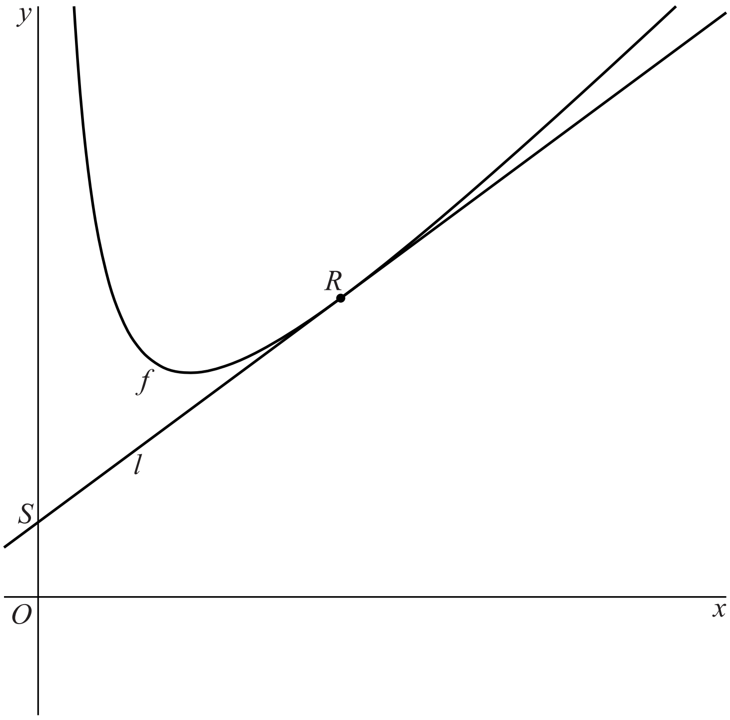
4p **5** Bereken exact voor welke waarden van x dit het geval is.

Ondanks dat de grafieken van f en g voor steeds groter wordende waarden van x steeds dichter bij elkaar komen, snijden ze elkaar niet.

4p **6** Toon op exacte wijze aan dat de grafieken van f en g elkaar niet snijden.

De lijn l met richtingscoëfficiënt $\frac{3}{4}$ raakt de grafiek van f in het punt R.
Het punt S is het snijpunt van l met de y-as. Zie figuur 2.

figuur 2



6p **7** Bereken exact de y-coördinaat van S.

Het punt $T(2,3)$ is de top van de grafiek van f.

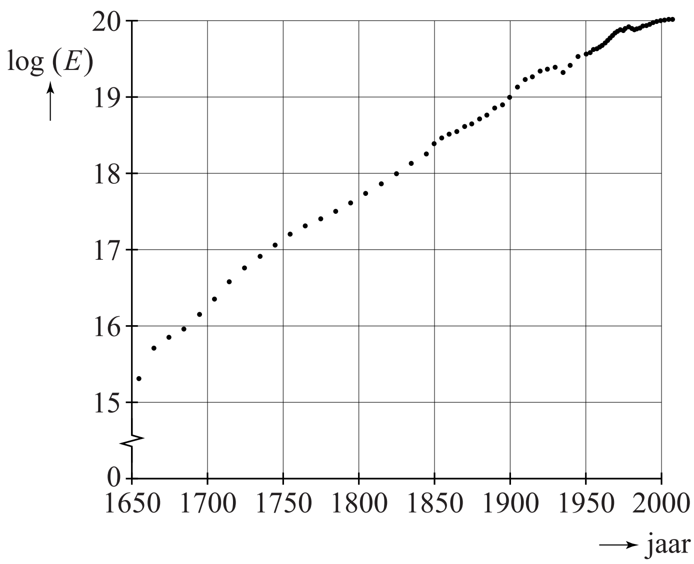
De grafiek van f wordt ten opzichte van de x-as vermenigvuldigd met een factor a. Hierdoor ontstaat de grafiek van een functie h. Het punt P is de top van de grafiek van h. Er geldt $OP = 5$.

4p **8** Bereken exact de mogelijke waarden van a.

Energieverbruik

Sinds het begin van de industriële revolutie is het totale jaarlijkse energieverbruik in de Verenigde Staten (VS) nagenoeg exponentieel toegenomen.
E is het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar. In figuur 1 is voor een aantal jaren $\log(E)$ aangegeven. Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 1

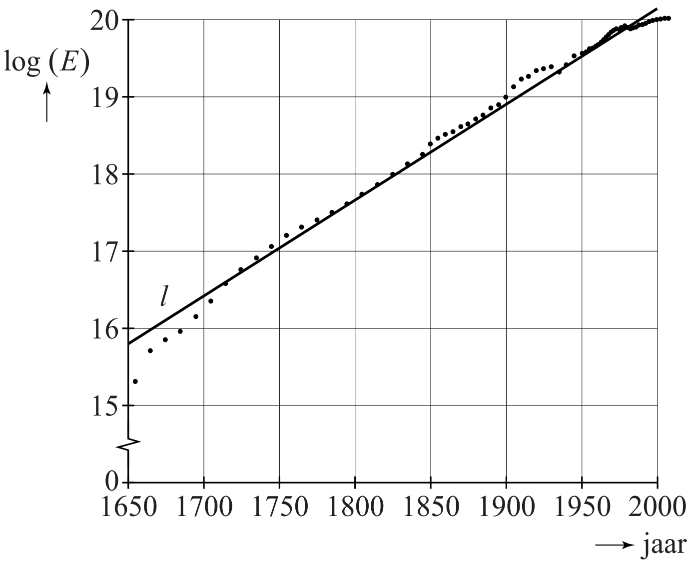


1 exajoule is gelijk aan 10^{18} joule.

4p **9** Bepaal met behulp van de figuur op de uitwerkbijlage het totale energieverbruik in de VS in het jaar 1950 in hele exajoules nauwkeurig. Licht je antwoord toe.

De punten in figuur 1 liggen bij benadering op een rechte lijn. Deze lijn l is in figuur 2 getekend.

figuur 2



Een formule voor lijn l is:

$$\log(E) = 0{,}0125t + 15{,}8$$

Hierin is E het totale energieverbruik per jaar in de VS in joule per jaar en t het aantal jaren met $t = 0$ voor het jaar 1650.

3p **10** Bereken in welk jaar volgens de formule in de VS voor het eerst meer dan $3{,}0 \cdot 10^{20}$ joule aan energie zal worden verbruikt.

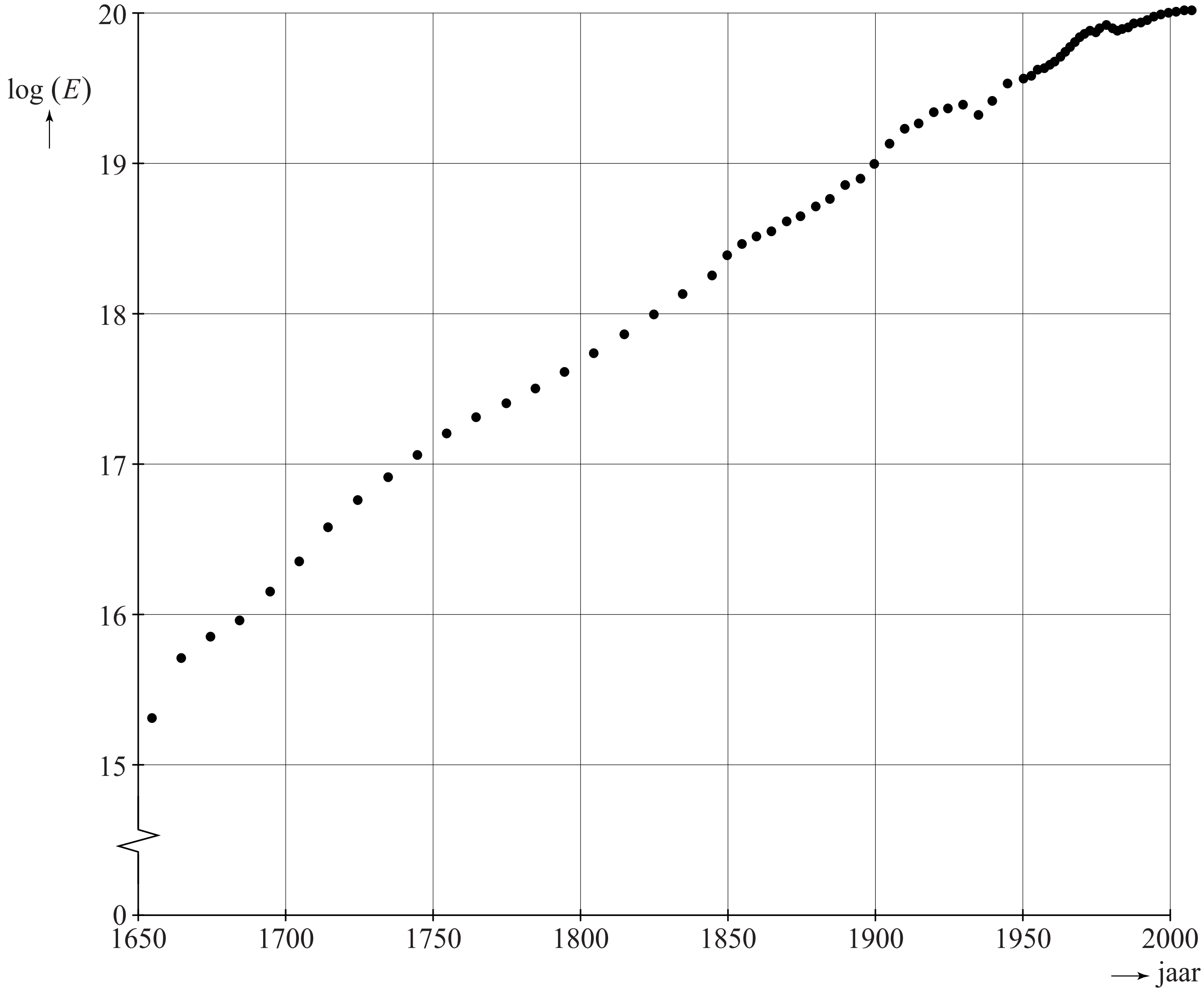
Een onderzoeker voorspelt dat het wereldwijde energieverbruik na 2010 exponentieel groeit, waarbij het elke honderd jaar tien keer zo hoog wordt.

Op 1 januari 2010 was het wereldwijde energieverbruik $1{,}2 \cdot 10^{13}$ joule per seconde. De aarde ontvangt van de zon veel meer energie, maar liefst $1{,}7 \cdot 10^{17}$ joule per seconde. Als alle energie die de aarde van de zon ontvangt door de mens gebruikt zou kunnen worden, dan zouden we nu theoretisch gezien alleen met zonne-energie kunnen volstaan. Volgens bovengenoemde voorspelling zullen we in de toekomst op een gegeven moment toch meer energie verbruiken dan de aarde van de zon ontvangt.

4p **11** Bereken over hoeveel eeuwen dit volgens deze voorspelling het geval zal zijn.

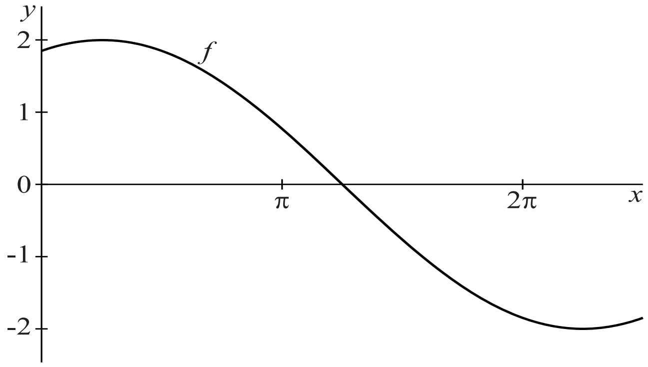
uitwerkbijlage

9



Op het domein $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$ is de functie f gegeven door $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\pi\right)$. Zie figuur 1.

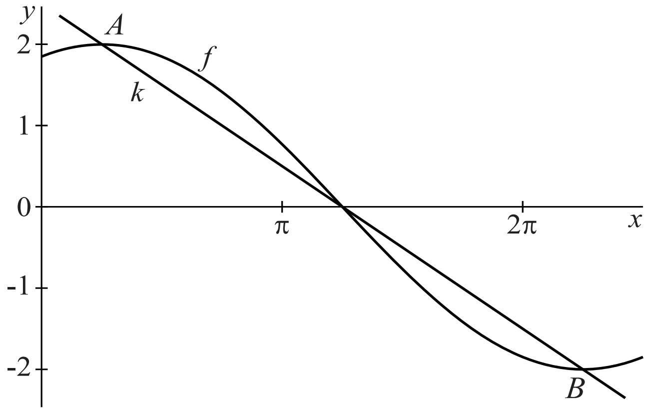
figuur 1



3p **12** Bereken exact de x-coördinaat van het snijpunt van de grafiek van f met de x-as.

De punten A en B zijn de toppen van de grafiek van f. Lijn k gaat door A en B. Zie figuur 2.

figuur 2



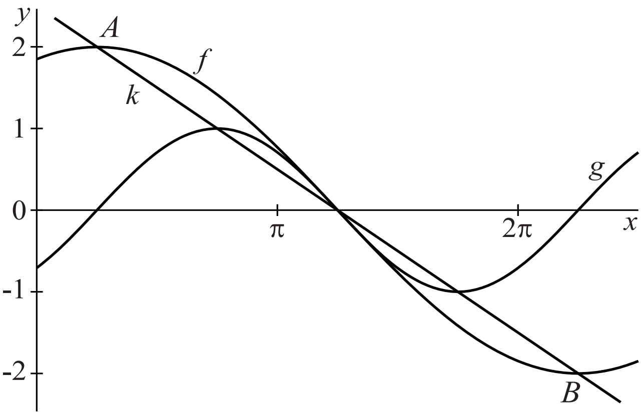
De coördinaten van A en B zijn $\left(\frac{1}{4}\pi, 2\right)$ en $\left(\frac{9}{4}\pi, -2\right)$.

Een vergelijking voor k is $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{5}{2}$.

2p **13** Toon aan dat deze vergelijking voor k met behulp van de coördinaten van A en B opgesteld kan worden.

Op hetzelfde domein is de functie g gegeven door $g(x) = \sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)$.
De toppen van de grafiek van g liggen ook op k. Zie figuur 3.

figuur 3

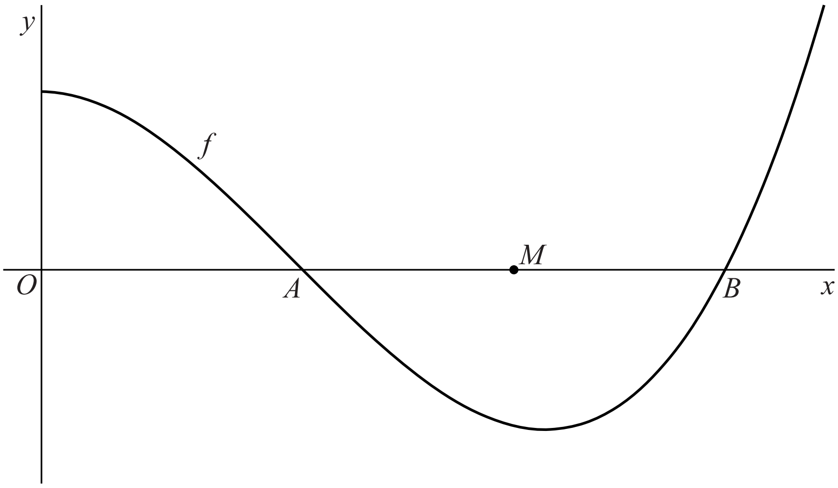


5p **14** Toon dit met exacte berekening aan.

Het midden en de top

De functie f is gegeven door $f(x)=(x+1)(x^2-5x+5)$. De grafiek van f snijdt de positieve x-as in de punten A en B. Het punt M is het midden van lijnstuk AB. Zie figuur 1.

figuur 1

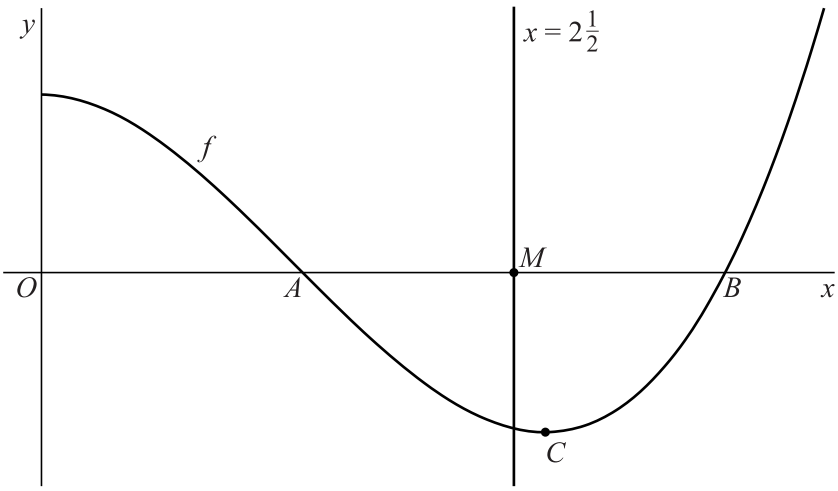


De x-coördinaat van M is gelijk aan $2\frac{1}{2}$.

4p **15** Toon dit met exacte berekening aan.

Het punt C is een top van de grafiek van f. De verticale lijn door M gaat niet door C. Zie figuur 2.

figuur 2



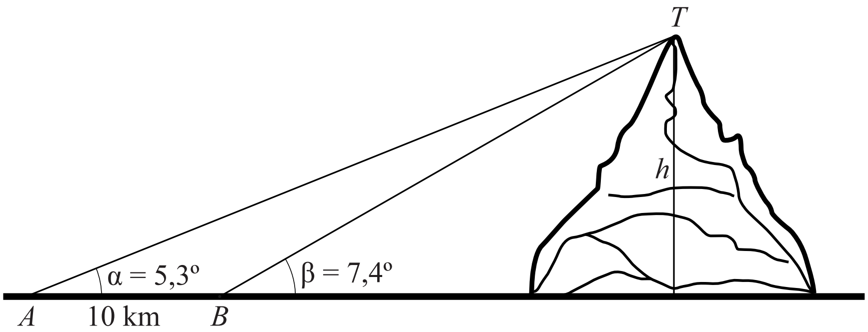
5p **16** Bereken exact het verschil tussen de x-coördinaten van M en C.

Monte Etna

De vulkaan Etna op Sicilië is vanaf de Middellandse Zee zichtbaar.

De hoogte van de Etna kan worden bepaald door middel van een zogeheten **driehoeksmeting**.
Vanaf een boot op zee wordt twee keer de hoek gemeten waaronder de top T van de Etna te zien is. Eerst wordt hoek $\alpha = 5,3°$ gemeten, vervolgens wordt 10 km in een rechte lijn richting de Etna gevaren en hoek $\beta = 7,4°$ gemeten. Zie de figuur, waarin ook de hoogte h van de top T ten opzichte van de Middellandse Zee is weergegeven. Deze figuur is niet op schaal.

figuur



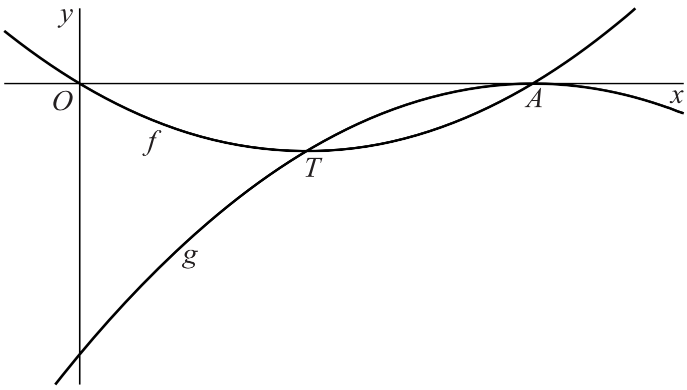
In dit model worden de kromming van de aarde en de ooghoogte van de waarnemer boven de zee verwaarloosd.

5p **17** Bereken de hoogte van de Etna ten opzichte van de Middellandse Zee.
Geef je antwoord in tientallen meters nauwkeurig.

Twee parabolen

De functie f is gegeven door $f(x) = x^2 - 6x$.
De grafiek van f snijdt de x-as in de oorsprong en in het punt A.
De grafiek van de functie g raakt de x-as in A en gaat door de top T van de grafiek van f. Zie de figuur.

figuur



De grafiek van g is een parabool.

7p **18** Bepaal op exacte wijze een functievoorschrift voor g.